**梯度 梯度定理**

2015/6/10

预备知识：[方向导数](#_方向导数)

在[方向导数](#_方向导数)中， 我们推出



其中就叫函数的梯度． 注意， 只有当是标量函数， 即因变量是一个数而不是矢量时， 才表示梯度算符(见[散度](#_散度_高斯定理)和[旋度](#_旋度))． 从微分简介中， 我们得出



的关系． 对于二元(平面)或者三元(空间)函数， 该式可记为



该式与的关系可类比一元函数微分和求导的关系．

**梯度定理**

以二元函数为例， 若沿着某条轨迹从移动到， 函数值的改变为



从另一方面来讲， 可以把该轨迹分成无数的小份， 每一份用上面的微分关系求出函数值的变化， 再相加得到函数值的变化



用定积分的思想可将上式表示为曲线积分



其中表示沿着曲线进行积分．

**物理实例**

一个电荷在点电荷产生的电场

中沿着轨迹从移动到， 求电场对电荷做的功．

****

由于这个积分太复杂， 我并不打算直接算出． 但是根据能量守恒可以知道， 电场对*q*做的功等于两个电荷之间电势能的减小， 即我们可以通过电势的公式算出以上积分．



从数学上来理解， 这条式子能成立， 是因为电场力等于电势能的梯度的负值(事实上， 任何保守力都是对应势能的负梯度， 这是能量守恒的数学要求)， 应用梯度定理即可得到上式．



两边同时除以得



这是说， 电场是电势的负散度．

有趣的是， 在该题中无论我们选取什么样的路径， 只要起点和终点不变， 电场做的功就不变． 用数学的语言来描述梯度场的这种普遍规律， 就是

**梯度场的线积分只和积分的初末位置有关， 与路径无关． 其值等于原函数在末位置的函数值减去初位置的函数值．**

这就是梯度定理． 这就好比说， 从山脚爬山到山地， 无论走那条路， 把每一步所增加的高度累加起来， 都等于山顶的高度减山脚的高度． 这是一元函数的牛顿-莱布尼兹定理的拓展． 一元函数没有路径的概念， 也就没有“与路径无关”之说了．